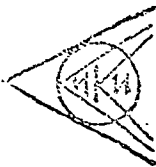


N 81 - 23000

Академия наук СССР



ИНСТИТУТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

TM-7620
(0611-19)

Пр-377

Л.В.Засова, Е.А.Устинов

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ
К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В СЛУЧАЕ
НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАНЕТНОЙ АТМОСФЕРЫ

Москва

Preceding Page Blank

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Книжная выставка

Пр-377

Л.В.Засова, Е.А.Устинов

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ
К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В СЛУЧАЕ
НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАНЕТНОЙ АТМОСФЕРЫ

1977

Preceding Page Blank

ЖЛБД 3054 00101

1971 10 10 10 10 10

Развит новый вариант метода дискретных ординат, применимый к неоднородной атмосфере большой оптической толщины. В отличие от существующих модификаций МДО, данный вариант может быть реализован в виде сравнительно простого алгоритма, единого для всех азимутальных компонент решения. Показано, что данный метод для однородных атмосфер дает хорошее согласие с результатами расчета другими методами.

A new version of the discrete-ordinate method is developed, which can be used for an optically thick inhomogeneous atmosphere. It may be implemented as an algorithm simpler than those proposed earlier. The algorithm is the same for each azimuth-dependent component of intensity. It is shown that the method proposed when used for homogeneous atmospheres is in good agreement with the results obtained by other methods.

ceding Page Blank

ЖИТБ-0187-01/1927
1927

Введение

Метод дискретных ординат /МДО/ является классическим методом решения уравнения переноса. Предложенный в 1950г. Чандрасекаром [1], он неоднократно применялся при решении ряда задач оптики планетных атмосфер. Одним из достоинств МДО является возможность определять не только излучение, отраженное или пропущенное атмосферой, но и поле рассеянного излучения на всем ее протяжении по вертикали. Как известно, основная идея метода состоит во введении $2n$ дискретных направлений по зенитному углу и замене интегрального члена в уравнении переноса соответствующей квадратурной суммой. При этом уравнение переноса преобразуется к матричному линейному неоднородному дифференциальному уравнению для вектора, составленного из значений интенсивности рассеянного излучения для каждого направления. Атмосфера предполагается однородной, поэтому коэффициенты этого уравнения постоянны, что позволяет применить для его решения стандартный метод, использующий корни соответствующего характеристического уравнения. Случай $2n = 2$ соответствует известному двухпотокowому приложению.

В настоящему времени опубликовано настолько большое количество работ, посвященных применению МДО для различных случаев переноса солнечного и теплового излучения в планетных атмосферах,

Preceding Page Blank
Succeeding Page Blank

что исчерпывающий библиографический обзор по этому вопросу мог бы стать темой отдельной публикации. Подавляющее большинство этих работ, как и [1], относится к однородным атмосферам. Лишь сравнительно недавно начало развиваться направление МДО, пригодное для случая вертикально неоднородных атмосфер. Обзор этих работ дан в [2], где изложен алгоритм, пригодный для решения уравнения переноса в неоднородной атмосфере при весьма общих граничных условиях на верхней и нижней границах. Идея, позволяющая применить МДО к неоднородным атмосферам, состоит во введении узлов интегрирования по оптической глубине и совместном решении полученной системы матричных уравнений. Несмотря на относительную простоту этой идеи, практическая реализация ее в работе [2] приводит к весьма громоздкому алгоритму, который в работе [2] изложен только для азимутально-независимой компоненты интенсивности.

С другой стороны, к настоящему времени достаточное развитие получил прямой метод решения уравнения переноса /метод сферических гармоник - МСГ/, приводящий в применении к неоднородным атмосферам к более простой матричной задаче, для которой разработаны методы, позволяющие получить стабильное решение в случае атмосфер большой оптической толщины [3-6].

Цель настоящей работы - дать алгоритм построения и решения матричной задачи для МДО, аналогичной соответствующей матричной задаче для МСГ и продемонстрировать работоспособность получаемой численной процедуры.

I. Построение матричной задачи

Пусть рассматривается рассеивающая и поглощающая среда, имеющая оптическую толщину τ_0 , характеристики рассеяния и поглощения которой зависят от глубины. Эти характеристики могут быть

Preceding Page Blank

описаны заданием коэффициентов разложения $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N$ индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра

$$p(\cos \theta) = \sum_{n=0}^N \omega_n P_n(\cos \theta),$$

нормированной таким образом, что величина ω_0 является альбедо однократного рассеяния. Уравнение переноса записывается в виде:

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI(\tau; \mu, \varphi)}{d\tau} + I(\tau; \mu, \varphi) = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(\tau; \cos \theta') I(\tau; \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' + \\ + \frac{1}{4} F \exp(-\tau/\mu_0) p(\tau; \cos \theta), \end{aligned} \quad /I/$$

где I — интенсивность рассеянного излучения;

τ — оптическая глубина, измеряемая от верхней границы атмосферы;

$\mu, \mu', \varphi, \varphi'$ — косинус зенитного угла и азимут направления рассеянного излучения, измеряемого от положительного направления оси τ ;

p — индикатриса рассеяния;

πF — внеатмосферная освещенность площадки, перпендикулярной направлению солнечных лучей;

μ_0 — косинус зенитного угла Солнца, измеряемого от зенита;

φ_0 — азимут Солнца;

$$\cos \theta' = \mu \mu' + \sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)} \cos(\varphi - \varphi'),$$

$$\cos \theta = \mu \mu_0 + \sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu_0^2)} \cos(\varphi - \varphi_0),$$

Граничные условия, выражающие отсутствие рассеянного излучения, падающего на атмосферу сверху, и наличие снизу рассеивающей подстилающей поверхности снизу, могут быть записаны в виде:

Preceding Page Blank

$$I(0; u, \varphi) = 0, \quad u > 0$$

$$I(\tau; u, \varphi) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \int_0^{2\pi} A(u, u', \varphi, \varphi') I(\tau; u', \varphi') u' du' d\varphi', \quad u < 0$$

где τ_0 - оптическая толщина атмосферы, $A(u, u', \varphi, \varphi')$ - коэффициент отражения подстилающей поверхности.

Следуя [1] и преобразуя полиномы Лежандра от аргументов $\cos \theta'$, $\cos \theta$ с помощью теоремы сложения сферических функций, получаем

$$P(u, \varphi, \mu_0, \varphi_0) = \sum_{m=0}^N (2 - \delta_{0m}) \times \\ \times \sum_{l=m}^N \omega_l Y_l^m(u) Y_l^m(\mu_0) \cos m(\varphi - \varphi_0), \\ P(u, \varphi, u', \varphi') = \sum_{m=0}^N (2 - \delta_{0m}) \times \\ \times \sum_{l=m}^N \omega_l Y_l^m(u) Y_l^m(u') \cos m(\varphi - \varphi'),$$

где $Y_l^m(u)$ связаны с присоединенными полиномами Лежандра соотношением:

$$Y_l^m(u) = \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(u),$$

$$\delta_{0m} = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$$

В этом случае решение уравнения переноса можно искать в виде разложения по азимутальным компонентам:

$$I(\tau; u, \varphi) = \sum_{m=0}^N I^m(\tau; u) \cos m(\varphi - \varphi_0). \quad /2/$$

После подстановки /2/ в уравнение переноса /1/ получаем $N+1$ независимых дифференциальных уравнений для $N+1$ азимутальных компонент интенсивности $I^m(\tau; u)$. Следующим шагом является введение $2n$ зенитных направлений u_i , представляющих собой узлы соответствующей квадратурной формулы Гаусса, и замена $I^m(\tau; u)$ набором $2n$ ее значений для этих направлений:

$$I_i^m(\tau) = I^m(\tau; u_i)$$

$$i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n.$$

Preceding Page Blank

При этом интеграл в уравнении переноса /1/ заменяется квадратурной суммой Гаусса. В результате получается система 2n линейных уравнений для каждой азимутальной компоненты интенсивности I^m .

$$\begin{aligned} u_i \frac{dI_i^m}{dz} = & -I_i^m + \sum_{\ell=m}^N \omega_\ell Y_\ell^m(u_i) \sum_{j=-n}^n a_j I_j^m Y_\ell^m(u_j) + \\ & + \left\{ \frac{1}{4} (2 - \delta_{0m}) \sum_{\ell=m}^N \omega_\ell Y_\ell^m(u_i) Y_\ell^m(\mu_0) \right\} \exp(-z/\mu_0) \end{aligned} \quad /3/$$

$$i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n \quad ; \quad 0 \leq m \leq N,$$

где u_i - узлы в квадратурной формуле Гаусса, которые являются корнями полинома Лежандра степени 2n ; $u_i = -u_{-i}$;

ω_i - веса в квадратурной формуле Гаусса, $\omega_i = \omega_{-i}$;

Узлы и веса квадратурной формулы P_{16} включительно приведены в табл. I, а для более высоких степеней - в работе [10].

Верхнее граничное условие выражает отсутствие диффузного излучения, падающего на атмосферу сверху

$$I_i^m(0) = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad /4/$$

Для того чтобы записать нижнее граничное условие, предположим, что коэффициент отражения подстилающей поверхности представляется в виде ряда

$$A(u, u', \varphi, \varphi') = \sum_{m=0}^N A^m(u, u') \cos m(\varphi - \varphi')$$

Тогда нижнее граничное условие представляется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} I_i^m(\tau_0) = & 2 \sum_{j=1}^n a_j u_j A^m(u_i, u_j) I_j^m(\tau_0) + \\ & + A^m(u_i, \mu_0) \mu_0 \exp(-\tau_0/\mu_0) \end{aligned} \quad /5/$$

$$i = -1, \dots, -n - /.$$

В частности, если подстилающая поверхность отражает излучение по закону Ламберта, то $A(u, \varphi, u', \varphi') = A_s$ и постоянна.

Для того, чтобы записать систему уравнений /3/ с граничными условиями /4.5/ в матричном виде, введем следующие обозначения:

ceding Page Blank

\vec{f}^m - вектор интенсивности с компонентами $f_i^m = I_i^m$,

$$i = -n, -n+1, \dots, -1, +1, \dots, n-1, n ;$$

A - диагональная матрица $2n \times 2n$ с элементами

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ u_i & i = j \end{cases} \quad i, j = -n, -n+1, \dots, -1, +1, \dots, n-1, n ;$$

C^m - матрица $2n \times 2n$ с элементами $C_{ij}^m = \delta_{ij} - \varepsilon_{ij}^m$,

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} ,$$

$$\varepsilon_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{\ell=-m}^m \omega_{\ell} Y_{\ell}^m(u_i) Y_{\ell}^m(u_j) ,$$

$$i, j = -n, -n+1, \dots, -1, +1, \dots, n-1, n ;$$

\vec{s}^m - вектор с компонентами

$$s_i^m = \frac{1}{4} (2 - \delta_{0m}) \left\{ \sum_{\ell=-m}^m \omega_{\ell} Y_{\ell}^m(u_i) Y_{\ell}^m(\mu_0) \right\} \exp(-\tau/\mu_0) \\ i = -n, \dots, -1, +1, \dots, n ;$$

G^m - матрица ранга n с элементами

$$G_{ij}^m = 2 \alpha_j u_j A^m(u_i, u_j) , \\ i, j = 1, \dots, n$$

\vec{B}^m - вектор размерности n с компонентами

$$B_i^m = \mu_0 A^m(u_i, \mu_0) F \exp(-\tau_s/\mu_0) , \\ i = 1, \dots, n .$$

Будем обозначать значками " t ", и " ε " соответственно верхнюю и нижнюю половину матрицы или вектора. Тогда, записывая

$$(\vec{f}^m)^t = \begin{bmatrix} I_{-n}^m \\ \vdots \\ I_{-1}^m \end{bmatrix} , \quad (\vec{f}^m)^{\varepsilon} = \begin{bmatrix} I_1^m \\ \vdots \\ I_n^m \end{bmatrix} ,$$

и используя введенные выше обозначения, систему уравнений /3/ с граничными условиями /4,5/ можно записать следующим образом:

Preceding Page Blank

$$\begin{cases} A \frac{d\vec{f}^m(\tau)}{d\tau} + C^m(\tau) \vec{f}^m(\tau) = \vec{s}^m(\tau), \\ (\vec{f}^m(0))^{\beta} = 0 \\ (\vec{f}^m(\tau_0))^{\beta} = G^m(\vec{f}^m(\tau_0))^{\beta} + \vec{B}^m. \end{cases} \quad /6/$$

Для интегрирования системы /6/ выбирается N_0 узлов интегрирования τ_i по глубине, так что $\tau_1 = 0$, $\tau_{N_0} = \tau_0$. Тогда, интегрируя /6/ в конечных разностях, имеем:

$$\begin{cases} D_{i,i}^m \vec{f}_i^m + D_{i,i+1}^m \vec{f}_{i+1}^m = \vec{w}_i^m, \\ i = 1, 2, \dots, N_0 - 1, \\ (\vec{f}_1^m)^{\beta} = 0, \\ (\vec{f}_{N_0}^m)^{\beta} = G^m(\vec{f}_{N_0}^m)^{\beta} + \vec{B}^m, \end{cases} \quad /7/$$

где

$$\begin{aligned} D_{i,i}^m &= -A + \frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{2} \cdot C^m\left(\frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}\right), \\ D_{i,i+1}^m &= A + \frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{2} \cdot C^m\left(\frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}\right), \\ w_i^m &= \frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{2} [\vec{s}^m(\tau_i) + \vec{s}^m(\tau_{i+1})]. \end{aligned}$$

Стабилизация решения осуществлялась по методу, изложенному в [6]. Из набора точек τ_i / $i = 1, 2, \dots, N_0$ / выбиралось необходимое число т.н. точек переобусловливания $\tau_{i_k} / k = 1, 2, \dots, N_c /$, причем $i_1 = 1$, $i_{N_c} = N_0$. Точки выбираются исходя из требования, чтобы на интервале между соседними точками ошибки округления не успевали вырасти до заметной величины. Все последующее изложение относится к произвольной азимутальной гармонике, поэтому индекс m опускаем.

Для решения системы уравнений /7/ определяется последовательность матриц U_i размером $2n \times n$ и $2n$ - векторы \vec{U}_i :

$$\begin{aligned} U_1 &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \\ U_i &= \pi_{i-1} U_{i-1}, \quad i_{k-1} < i < i_k, \end{aligned} \quad /8/$$

Preceding Page Blank

$$\vec{u}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{u}_i = (D_{i,i+1})^{-1} \vec{u}_{i+1}, \quad i_{k-1} < i < i_k, \quad /9/$$

где I - единичная матрица ранга n ,

$$\vec{u}_i = - (D_{i,i+1})^{-1} D_{i,i} \vec{u}_{i+1}.$$

В точках переобусловливания эти величины определяются из стабилизирующих преобразований. Для этого по рекуррентным соотношениям /8,9/ определяются величины

$$\begin{aligned} \hat{U}_{i_k} &= U_i \big|_{i=i_k}, \\ \vec{\hat{u}}_{i_k} &= \vec{u}_i \big|_{i=i_k}, \end{aligned}$$

по которым определяются матрицы ранга n T_k и n -векторы \vec{t}_k :

$$\begin{aligned} T_k &= (\hat{U}_{i_k}^t)^{-1}, \\ \vec{t}_k &= \vec{\hat{u}}_{i_k}^t. \end{aligned}$$

Стабилизированные величины U_{i_k} и \vec{u}_{i_k} в точке переобусловливания τ_{i_k} определяются по соотношениям:

$$\begin{aligned} U_{i_k} &= \begin{bmatrix} I \\ \hat{U}_{i_k}^B T_k \end{bmatrix}, \\ \vec{u}_{i_k} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{\hat{u}}_{i_k}^B - U_{i_k}^B \vec{t}_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Далее по рекуррентным соотношениям /8 / и /9/ U_i и \vec{u}_i определяются в пределах $i_k < i < i_{k+1}$, вычисляются величины

$\hat{U}_{i_{k+1}}$ и $\vec{\hat{u}}_{i_{k+1}}$ и процедура повторяется.

Далее определяется вектор $\vec{\ell}_{N_c}$ размерности n из решения матричного уравнения

$$(U_{N_0}^t - G U_{N_0}^B) \vec{\ell}_{N_c} = G \vec{u}_{N_0}^B - \vec{B},$$

Preceding Page Blank

затем строится последовательность векторов \vec{e}_k :

$$\vec{e}_k = T_{k+1}(\vec{e}_{k+1} - \vec{e}_{k+2}),$$

$$k = N_c - 1, N_c - 2, \dots, 1.$$

Тогда решение системы /7/ определяется в виде:

$$\vec{f}_i = U_i \vec{e}_k + \vec{u}_i,$$

$$i_k < i < i_{k+1},$$

$$k = 1, 2, \dots, N_c - 1,$$

/10/

$$\vec{f}_{N_0} = U_{N_0} \vec{e}_{N_c} + \vec{u}_{N_0}.$$

2. Сравнение с другими методами

Для проверки работоспособности метода был проведен ряд расчетов, результаты которых сравнивались с результатами, полученными другими методами. При расчетах принималась индикатриса рассеяния Хензи-Гринштейна с $g = 0,7$.

На рис. I представлены результаты расчета интенсивности излучения, отраженного и пропущенного оптически толстой средой / $\tau_0 = 30$ / при помощи метода дискретных ординат /МДО/, метода сферических гармоник /MSG/ и асимптотических формул [7], которые при таких оптических толщинах дают практически точное решение. Следует обратить внимание на регулярные знакопеременные отклонения получаемого решения от точных значений интенсивности. Эти отклонения нельзя считать свойственными данному методу решения матричной задачи, поскольку такие же отклонения обнаруживаются при решении системы /2/ методом характеристического уравнения в случае однородной атмосферы [8]. По-видимому, они присущи самому методу дискретных ординат и вызваны заменой интеграла по углу соответствующей квадратурной суммой. Отметим здесь же, что MSG дает для отраженного и пропущенного излучения систематически

Preceding Page Blank

меньшие значения интенсивности, однако, внутри среды решения быстро сходятся к точному. На рис.2 приведены результаты расчета компоненты I^0 в зависимости от оптической глубины по МДО и МСТ. При $\tau \geq 1$ оба метода дают практически одинаковые результаты. Сравнение результатов расчета в зависимости от τ по МДО и МСТ приведено на рис.3.

Значение потока уходящего излучения для различных углов падения и различных τ даны в табл.2, где они сравниваются с результатами расчетов по МДО с использованием характеристического уравнения[8].

Выводы

Развит новый вариант метода дискретных ординат, применимый к неоднородной атмосфере большой оптической толщины. В отличие от существующих модификаций МДО[2], данный вариант может быть реализован в виде сравнительно простого алгоритма, единого для всех азимутальных компонент решения. Показано, что данный метод для однородных атмосфер дает хорошее согласие с результатами расчета другими методами.

Preceding Page Blank

Литература

1. С.Чандрасекар. Перенос лучистой энергии, М, изд-во "Иностранной литературы", 1953.
2. F.R.Barkston. AIAA Paper, 1975, № 701.
3. J.Canosa, H.R.Penafiel. J. Quant. Spectr. Rad. Transfer, 1973, 13, 21.
4. J.V.Dave, J.Canosa. J. Atm. Sci., 1974, 31, 1089.
5. Е.А.Устинов. Препринт ИКИ АН СССР, 1976, Пр-307.
6. Е.А.Устинов, В.М.Филимонова. "Космические исследования", 1977, 15, 619.
7. R.E.Danielson, D.R.Moore, H.C. van de Hulst. J. Atm. Sci., 1969, 26, 1078.
8. K.N.Licu. J. Atm. Sci., 1973, 30, 1303.
9. A.N.Lowan, N.Davids, A.Levenson. Bull. Amer. Met. Soc., 1942, 48, 739.
10. А.С.Кронрод. Узлы и веса квадратурных формул, М, изд-во "Наука", 1969.

Preceding Page Blank

Таблица I.

Узлы и веса квадратурной формулы Гаусса [9] *

Узлы	Веса
$n = 2$	
$x_1 = 0,577350269189$	$\alpha_1 = 1,000000000000$
$n = 4$	
$x_1 = 0,339981043584$	$\alpha_1 = 0,652145154862$
$x_2 = 0,861136311594$	$\alpha_2 = 0,347854845137$
$n = 6$	
$x_1 = 0,238619186083$	$\alpha_1 = 0,467913934572$
$x_2 = 0,661209386466$	$\alpha_2 = 0,360761573048$
$x_3 = 0,932469514203$	$\alpha_3 = 0,171324492379$
$n = 8$	
$x_1 = 0,183434642495$	$\alpha_1 = 0,362683783378$
$x_2 = 0,525532409916$	$\alpha_2 = 0,313706645877$
$x_3 = 0,796866477413$	$\alpha_3 = 0,222381034453$
$x_4 = 0,960289856497$	$\alpha_4 = 0,101228536290$
$n = 10$	
$x_1 = 0,148874338981$	$\alpha_1 = 0,295524224714$
$x_2 = 0,433395394129$	$\alpha_2 = 0,269266719309$
$x_3 = 0,679409568299$	$\alpha_3 = 0,219066362515$
$x_4 = 0,865063366688$	$\alpha_4 = 0,149451349150$
$x_5 = 0,973906528517$	$\alpha_5 = 0,086671344808$

* $u_i = x_i$ при $i > 0$ и $u_i = -x_{-i}$ при $i < 0$; $\alpha_{-i} = \alpha_i$

Preceding Page Blank

Продолжение таблицы I.

Узлы	Веса
$n = 12$	
$\alpha_1 = 0,125233408511$	$\alpha_1 = 0,249147045813$
$\alpha_2 = 0,367831498998$	$\alpha_2 = 0,233492536538$
$\alpha_3 = 0,587317954286$	$\alpha_3 = 0,203167426723$
$\alpha_4 = 0,769902674194$	$\alpha_4 = 0,160078328543$
$\alpha_5 = 0,904117256370$	$\alpha_5 = 0,106939325995$
$\alpha_6 = 0,981560634246$	$\alpha_6 = 0,047175336386$
$n = 14$	
$\alpha_1 = 0,108054948707$	$\alpha_1 = 0,215263353463$
$\alpha_2 = 0,319112368927$	$\alpha_2 = 0,205198463721$
$\alpha_3 = 0,515248636358$	$\alpha_3 = 0,185538397477$
$\alpha_4 = 0,687292904811$	$\alpha_4 = 0,157203167158$
$\alpha_5 = 0,827201315069$	$\alpha_5 = 0,121518570687$
$\alpha_6 = 0,928434883663$	$\alpha_6 = 0,080158087159$
$\alpha_7 = 0,986283808696$	$\alpha_7 = 0,035119460331$
$n = 16$	
$\alpha_1 = 0,095012509837$	$\alpha_1 = 0,189450610455$
$\alpha_2 = 0,281603550779$	$\alpha_2 = 0,182603415044$
$\alpha_3 = 0,458016777657$	$\alpha_3 = 0,169156519395$
$\alpha_4 = 0,617876244402$	$\alpha_4 = 0,149595988816$
$\alpha_5 = 0,755404408355$	$\alpha_5 = 0,124628971255$
$\alpha_6 = 0,865631202387$	$\alpha_6 = 0,095158511682$
$\alpha_7 = 0,944575023073$	$\alpha_7 = 0,062253523938$
$\alpha_8 = 0,989400934991$	$\alpha_8 = 0,027152459411$

Preceding Page Blank

Таблица 2.
Поток уходящего излучения

в зависимости от углов падения μ_0 и оптической
толщины τ_0 .

τ_0	$\mu_0 = 0,1$		$\mu_0 = 0,5$		$\mu_0 = 0,9$	
	настоящая работа	[2]	настоящая работа	[8]	настоящая работа	[8]
0,25	0,41769	0,41768	0,07158	0,07165	0,02260	0,02246
1,00	0,58572	0,58567	0,24086	0,24048	0,09671	0,09654
4,00	0,73643	0,73541	0,52008	0,51977	0,34836	0,34776
16,00	0,88382	0,88240	0,78774	0,78702	0,70760	0,70627

Preceding Page Blank

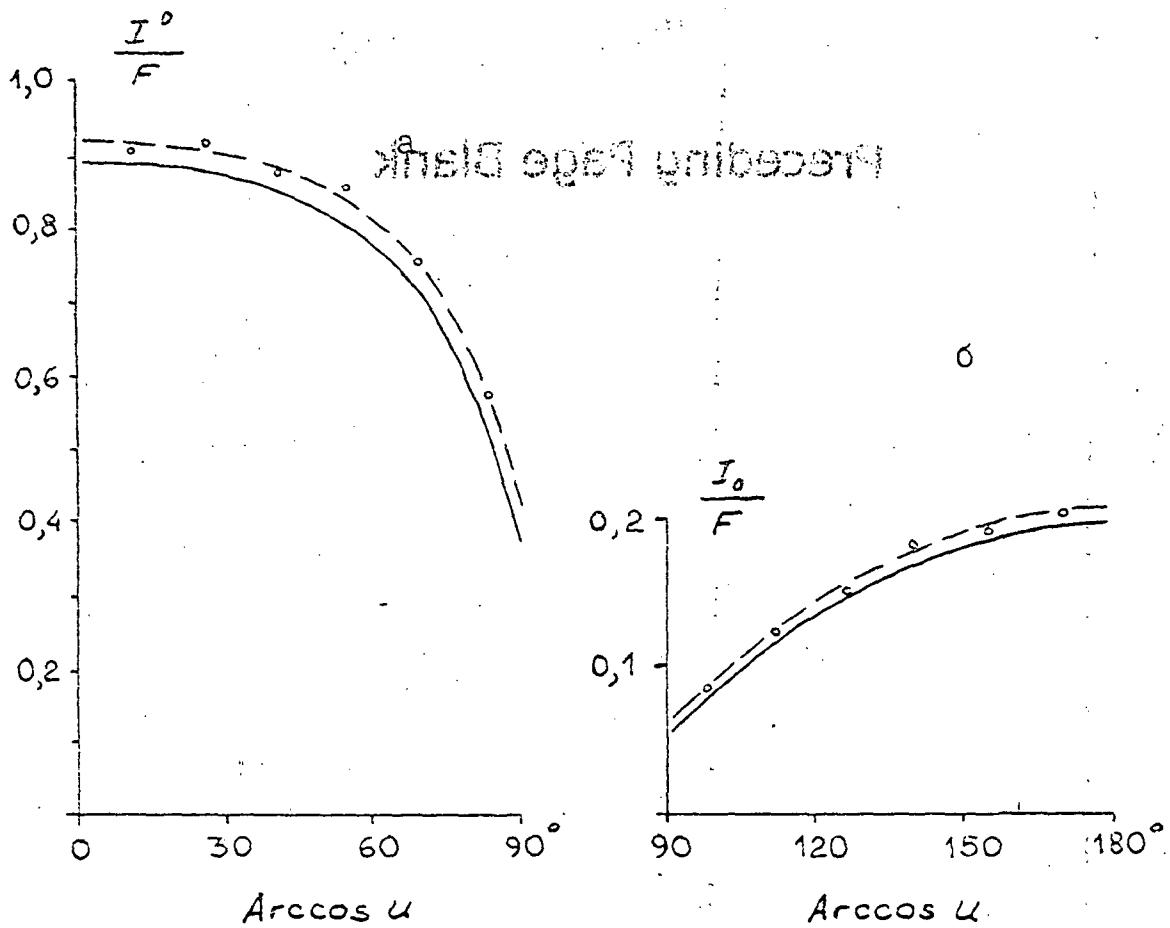


Рис.1. Отношение $\frac{I^0}{F}$ для уходящего /а/ и пропущенного /б/ излучения, $\omega_0 = 1$, $\tau = 30$, $\mu_0 = 1$, $A = 0.3$. Точки - МДО, сплошная линия - МСТ, пунктир - асимптотические формулы [7].

Preceding Page Blank

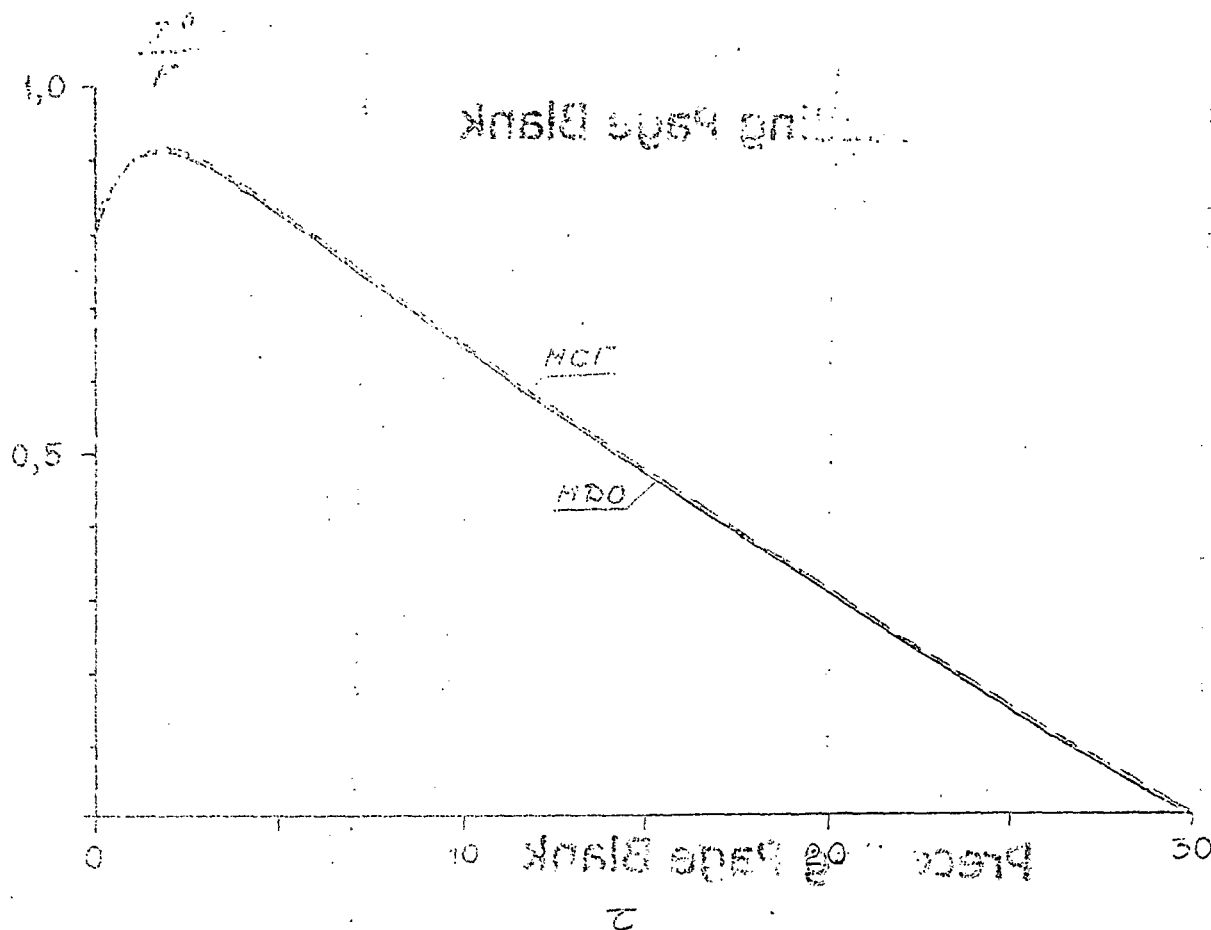


Рис.2. Отношения I^0/F в зависимости от оптической глубины τ , рассчитанные по МДО и МСГ. $\mu = 0,770$;
 $\mu_0 = 1$; $\omega_0 = 0,999$; $\tau_0 = 30$; $A = 0$.

Leading Page Blank

Preceding Page Blank

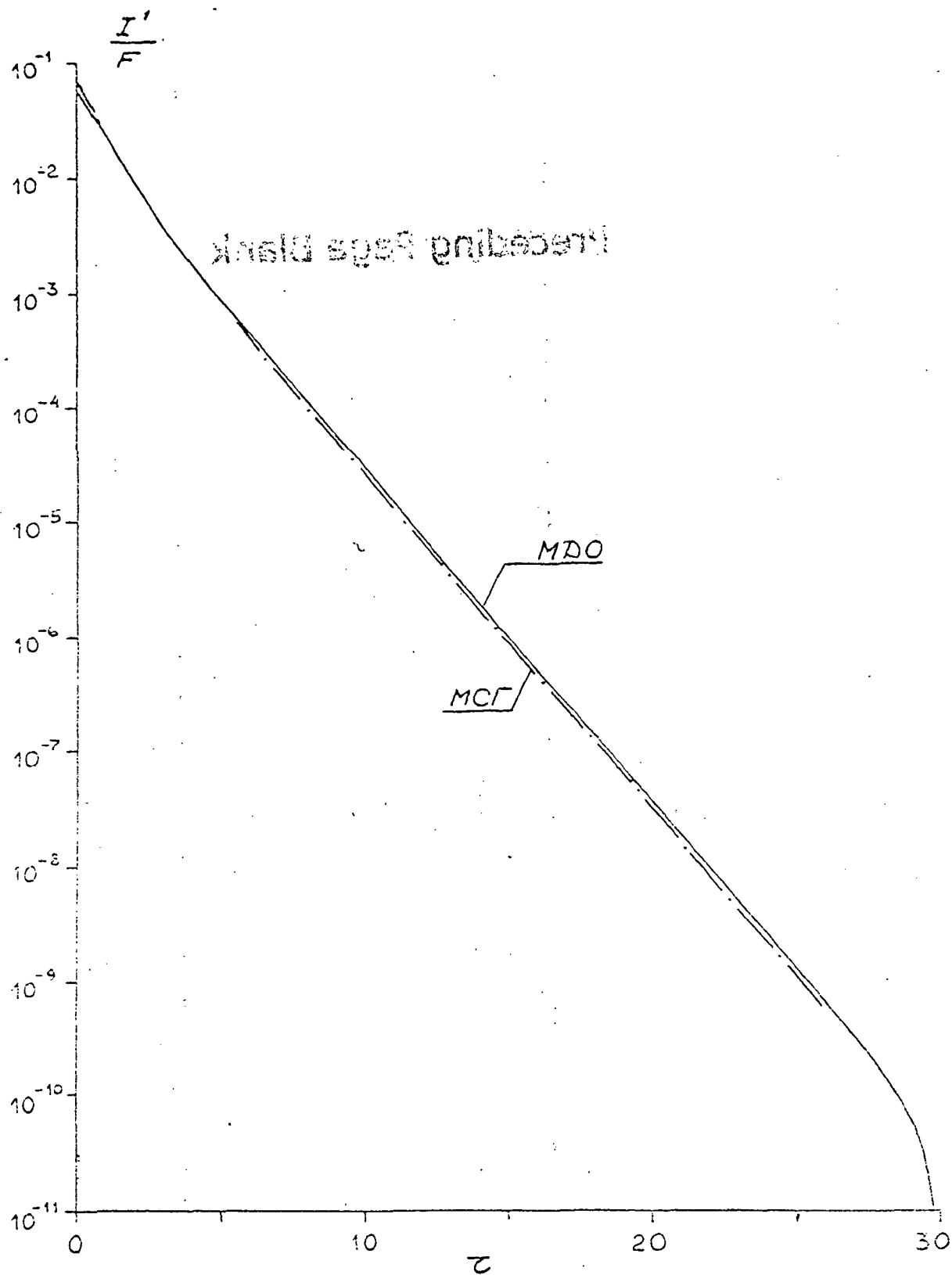


Рис.3. Величина I'/F в зависимости от оптической глубины τ ,
 рассчитанная по МДО и МСГ. $u = 0,770$; $\mu_0 = 0,5$;
 $\tau_0 = 30$; $\omega_0 = 1$.

Preceding Page Blank

О.С. 222

Отпечатано в ИИИ АН УССР

И.И.И.И.

Подписано к печати 18.08.72

Знамя 1972

Тираж 100 экз.

Объем 0,8 уч.-изд.л.